

# Protokół teleportacji kwantowej

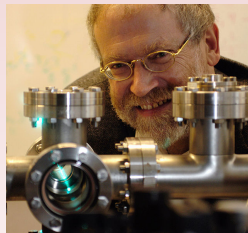
Robert Nowotniak

Wydział Fizyki Technicznej, Informatyki i Matematyki Stosowanej  
Politechnika Łódzka

Sekcja Informatyki Kwantowej, 9 stycznia 2008

# Teleportacja kwantowa

- **1993** – Propozycja teoretyczna protokołu teleportacji kwantowej
- **1997** – Pomyślny eksperyment praktyczny – fotony, A. Zeilinger
- **2004** – Pierwszy eksperyment z atomami, Riebe, Häffner, Roos
- ...





**Charles H. Bennet, Gilles Brassard et al.**  
*Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels.* 1993



Gilles Brassard.  
*Teleportation as a quantum computation.* 1996



Mika Hirvensalo.  
*Algorytmy Kwantowe.* WSiP, Warszawa, 2004



Roger Penrose.  
*Nowy umysł cesarza.* Wydawnictwo naukowe PWN,  
Warszawa, 1995, str. 40-44



Roger Penrose.  
*Droga do rzeczywistości.* Warszawa, 2004, str. 552-580

- 1 Stany splątane
- 2 Opis protokołu teleportacji
- 3 Układ bramek kwantowych
- 4 Symulacja układu

Stan  $|\phi\rangle$  dwóch kubitów jest *splątany*, jeśli nie można go przedstawić w postaci iloczynu tensorowego pojedynczych kubitów, tzn:

$$|\phi\rangle \neq (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle)$$

gdzie

$$a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \quad |c|^2 + |d|^2 = 1$$

Stan  $|\phi\rangle$  dwóch kubitów jest *splątany*, jeśli nie można go przedstawić w postaci iloczynu tensorowego pojedynczych kubitów, tzn:

$$|\phi\rangle \neq (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle)$$

gdzie

$$a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \quad |c|^2 + |d|^2 = 1$$

W teleportacji będzie wykorzystany stan splątany:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

# Stany splątane

Stan  $|\Phi^+\rangle$  jest stanem splątanym, ponieważ nie można go przedstawić w postaci iloczynu tensorowego:

$$|\Phi^+\rangle \neq (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle)$$

# Stany splątane

Stan  $|\Phi^+\rangle$  jest stanem splątanym, ponieważ nie można go przedstawić w postaci iloczynu tensorowego:

$$|\Phi^+\rangle \neq (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \neq (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle)$$

# Stany splątane

Stan  $|\Phi^+\rangle$  jest stanem splątanym, ponieważ nie można go przedstawić w postaci iloczynu tensorowego:

$$|\Phi^+\rangle \neq (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \neq (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \neq ac|00\rangle + ad|01\rangle + bc|10\rangle + bd|11\rangle$$

Z tego wynikałby układ równań

$$\begin{cases} ac = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ bd = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ ad = 0 \\ bc = 0 \end{cases} \quad (1)$$

(1) jest układem sprzecznym, więc  $|\Phi^+\rangle$  jest stanem splątanym. ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ ↻

- 1 Stany splątane
- 2 Opis protokołu teleportacji
- 3 Układ bramek kwantowych
- 4 Symulacja

# Teleportacja kwantowa – opis

- Celem teleportacji kwantowej jest przesłanie stanu kubitu pomiędzy różnymi lokalizacjami

# Teleportacja kwantowa – opis

- Celem teleportacji kwantowej jest przesłanie stanu kubitu pomiędzy różnymi lokalizacjami

## Wymagania

- 1 Klasyczny kanał komunikacji (przesłanie bitów)
- 2 Kwantowy kanał komunikacji (współdzielona splątana para EPR)

# Teleportacja kwantowa – opis

- Celem teleportacji kwantowej jest przesłanie stanu kubitu pomiędzy różnymi lokalizacjami

## Wymagania

- 1 Klasyczny kanał komunikacji (przesłanie bitów)
- 2 Kwantowy kanał komunikacji (współdzielona splątana para EPR)

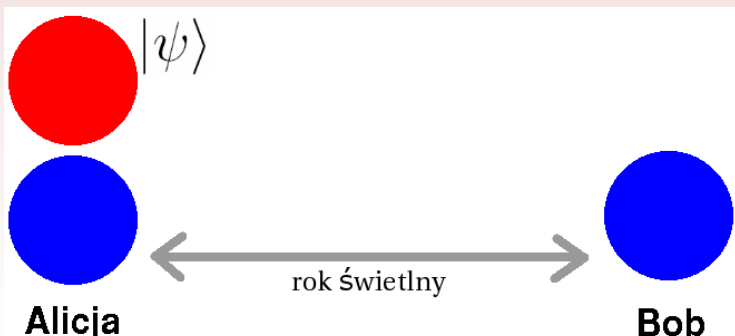
Teleportacja kwantowa nie oznacza *natychmiastowego* przesyłania informacji – z szybkością większą od prędkości światła.

(to byłoby sprzeczne ze szczególną teorią względności)

# Opis protokołu

- Alicja posiada kubit w pewnym stanie  $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$  (którego wartości może nie znać)
- Alicja i Bob, znajdując się w różnych lokalizacjach, posiadają po jednym kubicie należącym do splątanej pary:

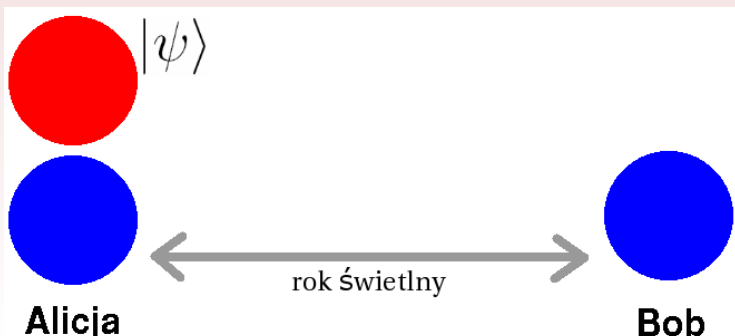
$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$



# Opis protokołu

- Alicja posiada kubit w pewnym stanie  $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$  (którego wartości może nie znać)
- Alicja i Bob, znajdując się w różnych lokalizacjach, posiadają po jednym kubicie należącym do splątanej pary:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$



Wobec tego stan całego układu – nieznanego kubitów  $|\psi\rangle$  oraz splątanej pary EPR – przedstawia wyrażenie<sup>1</sup>:

$$(a|0\rangle + b|1\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) =$$

---

<sup>1</sup>W przekształceniu (2) wykorzystywana jest nieudowodniana wcześniej, lecz prosta do wykazania własność iloczynu tensorowego:

$$|1\rangle \otimes |101\rangle = |1\rangle|101\rangle = |1101\rangle \text{ itd.}$$

Wobec tego stan całego układu – nieznanego kubitów  $|\psi\rangle$  oraz splątanej pary EPR – przedstawia wyrażenie<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} & (a|0\rangle + b|1\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = \\ &= \frac{a}{\sqrt{2}}|0\rangle|00\rangle + \frac{a}{\sqrt{2}}|0\rangle|11\rangle + \frac{b}{\sqrt{2}}|1\rangle|00\rangle + \frac{b}{\sqrt{2}}|1\rangle|11\rangle \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>W przekształceniu (2) wykorzystywana jest nieudowodniona wcześniej, lecz prosta do wykazania własność iloczynu tensorowego:

$|1\rangle \otimes |101\rangle = |1\rangle|101\rangle = |1101\rangle$  itd.

Wobec tego stan całego układu – nieznanego kubitów  $|\psi\rangle$  oraz splątanej pary EPR – przedstawia wyrażenie<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} & (a|0\rangle + b|1\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = \\ &= \frac{a}{\sqrt{2}}|0\rangle|00\rangle + \frac{a}{\sqrt{2}}|0\rangle|11\rangle + \frac{b}{\sqrt{2}}|1\rangle|00\rangle + \frac{b}{\sqrt{2}}|1\rangle|11\rangle \\ &= \frac{a}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{a}{\sqrt{2}}|011\rangle + \frac{b}{\sqrt{2}}|100\rangle + \frac{b}{\sqrt{2}}|111\rangle \quad (2) \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>W przekształceniu (2) wykorzystywana jest nieudowodniona wcześniej, lecz prosta do wykazania własność iloczynu tensorowego:

$|1\rangle \otimes |101\rangle = |1\rangle|101\rangle = |1101\rangle$  itd.

- Alicja wykonuje na swoim kubicie, ze splątanej pary, operację **sterowanej negacji**, wykorzystując nieznaną kubit  $|\psi\rangle$  jako kubit sterujący. Stan:

$$\frac{a}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{a}{\sqrt{2}}|011\rangle + \frac{b}{\sqrt{2}}|100\rangle + \frac{b}{\sqrt{2}}|111\rangle$$

przekształca się w stan:

$$\frac{a}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{a}{\sqrt{2}}|011\rangle + \frac{b}{\sqrt{2}}|110\rangle + \frac{b}{\sqrt{2}}|101\rangle$$

Alicja wykorzystuje operator Hadamarda na posiadanym przez nią nieznanym kubicie, otrzymując:

$$\begin{aligned} & \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) |00\rangle + \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) |11\rangle \\ & + \frac{b}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) |10\rangle + \frac{b}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) |01\rangle \end{aligned} \quad (3)$$

Wykorzystując własności iloczynu tensorowego i wykonując odpowiednie przekształcenia otrzymujemy kolejno:

$$\begin{aligned} & \frac{a}{2}|000\rangle + \frac{a}{2}|100\rangle + \frac{a}{2}|011\rangle + \frac{a}{2}|111\rangle \\ & + \frac{b}{2}|010\rangle + \frac{b}{2}|110\rangle + \frac{b}{2}|001\rangle + \frac{b}{2}|101\rangle \end{aligned} \quad (4)$$

Wykorzystując własności iloczynu tensorowego i wykonując odpowiednie przekształcenia otrzymujemy kolejno:

$$\begin{aligned} & \frac{a}{2}|000\rangle + \frac{a}{2}|100\rangle + \frac{a}{2}|011\rangle + \frac{a}{2}|111\rangle \\ & + \frac{b}{2}|010\rangle + \frac{b}{2}|110\rangle + \frac{b}{2}|001\rangle + \frac{b}{2}|101\rangle \end{aligned} \quad (4)$$

Oddzielenie kubitu posiadanego przez Boba:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}|00\rangle a|0\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle a|0\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle a|1\rangle + \frac{1}{2}|11\rangle a|1\rangle \\ & + \frac{1}{2}|01\rangle b|0\rangle - \frac{1}{2}|11\rangle b|0\rangle + \frac{1}{2}|00\rangle b|1\rangle - \frac{1}{2}|10\rangle b|1\rangle \end{aligned} \quad (5)$$

Wykorzystując własności iloczynu tensorowego i wykonując odpowiednie przekształcenia otrzymujemy kolejno:

$$\begin{aligned} & \frac{a}{2}|000\rangle + \frac{a}{2}|100\rangle + \frac{a}{2}|011\rangle + \frac{a}{2}|111\rangle \\ & + \frac{b}{2}|010\rangle + \frac{b}{2}|110\rangle + \frac{b}{2}|001\rangle + \frac{b}{2}|101\rangle \end{aligned} \quad (4)$$

Oddzielenie kubitu posiadanego przez Boba:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}|00\rangle|a0\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle|a0\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle|a1\rangle + \frac{1}{2}|11\rangle|a1\rangle \\ & + \frac{1}{2}|01\rangle|b0\rangle - \frac{1}{2}|11\rangle|b0\rangle + \frac{1}{2}|00\rangle|b1\rangle - \frac{1}{2}|10\rangle|b1\rangle \end{aligned} \quad (5)$$

Pogrupowanie składników:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}|00\rangle(|a0\rangle + |b1\rangle) + \frac{1}{2}|01\rangle(|a1\rangle + |b0\rangle) \\ & + \frac{1}{2}|10\rangle(|a0\rangle - |b1\rangle) + \frac{1}{2}|11\rangle(|a1\rangle - |b0\rangle) \end{aligned} \quad (6)$$

Ostatecznie Alicja dokonuje **pomiar** posiadanych przez nią dwóch kubitów. Na mocy powyższych przekształceń, stan całego układu (wraz z kubitom Boba) ma jedną z następujących wartości:

Wynik pomiaru Alicji	Stan po obserwacji
00	$ 00\rangle(a 0\rangle + b 1\rangle)$
01	$ 01\rangle(a 1\rangle + b 0\rangle)$
10	$ 10\rangle(a 0\rangle - b 1\rangle)$
11	$ 11\rangle(a 1\rangle - b 0\rangle)$

Ostatecznie Alicja dokonuje **pomiar** posiadanych przez nią dwóch kubitów. Na mocy powyższych przekształceń, stan całego układu (wraz z kubitem Boba) ma jedną z następujących wartości:

Wynik pomiaru Alicji	Stan po obserwacji
00	$ 00\rangle(a 0\rangle + b 1\rangle)$
01	$ 01\rangle(a 1\rangle + b 0\rangle)$
10	$ 10\rangle(a 0\rangle - b 1\rangle)$
11	$ 11\rangle(a 1\rangle - b 0\rangle)$

Na podstawie dwóch bitów otrzymanych od Alicji, Bob – wykorzystując odpowiedni operator kwantowy – doprowadza stan posiadanego przez siebie kubitów do pożądanego stanu  $|\psi\rangle$ .

# Znaczenie teleportacji...

- Możliwość potencjalnej teleportacji układów większych niż pojedyncze cząstki prowadzi do bardzo interesujących wniosków...

# Znaczenie teleportacji...

- Możliwość potencjalnej teleportacji układów większych niż pojedyncze cząstki prowadzi do bardzo interesujących wniosków...
- Zgodnie z **zasadą nieoznaczoności** możemy tylko w ograniczonym stopniu rejestrować rzeczywistość — nigdy nie będziemy w stanie zapisać dokładnie całego stanu materii np. w ludzkim mózgu w danej chwili.

# Znaczenie teleportacji...

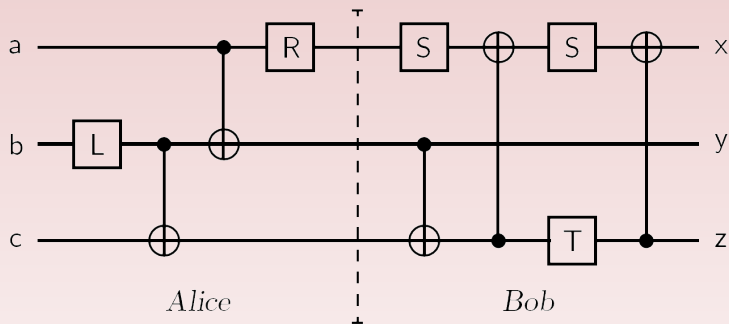
- Możliwość potencjalnej teleportacji układów większych niż pojedyncze cząstki prowadzi do bardzo interesujących wniosków...
- Zgodnie z **zasadą nieoznaczoności** możemy tylko w ograniczonym stopniu rejestrować rzeczywistość — nigdy nie będziemy w stanie zapisać dokładnie całego stanu materii np. w ludzkim mózgu w danej chwili.
- Teleportacja kwantowa pozwala na przesyłanie stanów układów kwantowych, bez ich rejestrowania

# Znaczenie teleportacji...

- Możliwość potencjalnej teleportacji układów większych niż pojedyncze cząstki prowadzi do bardzo interesujących wniosków...
- Zgodnie z **zasadą nieoznaczoności** możemy tylko w ograniczonym stopniu rejestrować rzeczywistość — nigdy nie będziemy w stanie zapisać dokładnie całego stanu materii np. w ludzkim mózgu w danej chwili.
- Teleportacja kwantowa pozwala na przesyłanie stanów układów kwantowych, bez ich rejestrowania
- Liczba zmiennych, które opisują stany kwantowe wszystkich cząstek w ciele człowieka, jest liczbą porównywalną z liczbą atomów we wszechświecie.

- 1 Stany splątane
- 2 Opis protokołu teleportacji
- 3 Układ bramek kwantowych
- 4 Symulacja

# Układ bramek realizujący teleportację



$$L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

- 1 Stany splątane
- 2 Opis protokołu teleportacji
- 3 Układ bramek kwantowych
- 4 **Symulacja układu**

(kod w Numerical Python)

Dziękuję.  
Pytania lub wątpliwości?